ISSN:2181-0427 ISSN:2181-1458

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ИЛМИЙ АХБОРОТНОМАСИ

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК НАМАНГАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 йил 9-сон

Таҳририят манзили: Наманган шаҳри, Уйчи кўчаси, 316-уй.
Тел: (0369)227-01-44, 227-06-12 ***Факс:*** (0369)227-07-61 ***е- mail*:** ilmiy@inbox.uz

Ушбу журнал 2019 йилдан бошлаб Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси Раёсати қарори билан физика-математика, кимё, биология, фалсафа, филология ва педагогика фанлари бўйича Олий аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.
*“НамДУ илмий ахборотномаси–Научный вестник НамГУ” журнали Ўзбекистон Матбуот ва ахборот агентлигининг 17.05.2016 йилдаги 08-0075 рақамли гувоҳномаси хамда Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги (АОКА) томонидан 2020 йил 29 август куни 1106-сонли гувоҳнома га биноан чоп этилади. “НамДУ Илмий Ахборотномаси” электрон нашр сифатида ҳалқаро стандарт туркум рақами (ISSN-2181-1458)га эга НамДУ Илмий-техникавий Кенгашининг 14.09.2021 йилдаги кенгайтирилган йиғилишида муҳокама қилиниб, илмий тўплам сифатида чоп этишга рухсат этилган (**Баённома № 9**). Мақолаларнинг илмий савияси ва келтирилган маълумотлар учун муаллифлар жавобгар ҳисобланади.*

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ-2021

$$\begin{cases} R_{e_1}(e_i) = e_{i+1}, 2 \le i \le n-1 \\ R_{e_1}(x) = -e_1 - e_2, \\ R_x(e_1) = e_1 \\ R_x(e_i) = (i-1)e_i, \quad 2 \le i \le n \end{cases}$$

Tasdiq 4 ga ko'ra $Der(R_1) = \alpha_1 R_{e_1} + \beta_3 R_x$ ya'ni R_1 algebraning barcha differensiallashlari ichki ekanligi kelib chiqdi.

Tasdiq isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Аюпов Ш.А. Омиров Б.А. *О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница* // Сиб. Мат. Журнал. – 2001. – Т. **42**. - № 1.

2. Karimjanov I. *Classification of Leibniz algebras with a given nilradical and with some corresponding Lie algebra* // PhD Thesis. – University of Santiago de Compostela. – 2017. – 107 p.

КВАТЕРНИОН СОНЛАРНИНГ ҲАҚИҚИЙ ТАСВИРЛАРИ ГРУППАСИ ТАЪСИРИГА НИСБАТАН ЙЎЛЛАРНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИК МАСАЛАСИ

Мўминов Қобилжон Қодирович,
ЎзМУ, физика-математика фанлари доктори, профессор,
Жўрабоев Саидахбор Солижонович,
Фарғона давлат университети, таянч докторант
Тел: 98 367-41-55 e-mail: m.muminov@rambler.ru
Тел: 93 480-28-88 e-mail: saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Аннотация: *Мақолада кватернион сонларнинг ҳақиқий тасвирлари группаси таъсирига нисбатан йўлларнинг эквивалентлик масаласи ўрганилган.*

***Калит сўзлар*:** *йўл, эквивалентлик, дифференциал инвариант, дифференциал рационал функция.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КВАТЕРНИОННЫХ ЧИСЕЛ

Муминов Кобилжон Кодирович,
УзНУ, доктор физико-математических наук, профессор,
Журабаев Саидахбор Солижонович,
Ферганский государственный университет, докторант
Тел: 98 367-41-55 e-mail: m.muminov@rambler.ru
Тел: 93 480-28-88 e-mail: saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Аннотация: *В статье исследуется проблема эквивалентности путей по отношению к действию группы вещественных представленов кватернионных чисел.*

Ключевые слова: *путь, эквивалентность, дифференциал инвариант, дифференциальная рациональная функция.*

EQUIVALENCE OF PATHS WITH RESPECT TO THE ACTION OF THE GROUP OF REAL REPRESENTATIONS OF QUATERNION NUMBERS

Muminov Kobiljon Kodirjonovich,
Uz.NU, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor,
Jurabayev Saidakhbor Solijonovich,
Fergana State University, doctorant
Тел: 98 367-41-55 e-mail: m.muminov@rambler.ru
Тел: 93 480-28-88 e-mail: saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Annotation: *The article investigates the problem of path equivalence with respect to the action of a group of real representations of quaternion numbers.*

Key words: *path, equivalence, differential invariant, differential rational function.*

Кватернион сонларнинг ҳақиқий тасвирлари группаси

$V = R^4$ элементлари тўрт ўлчовли устун векторлардан иборат ҳақиқий вектор фазо ва элементлари

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ -b_1 & a_1 & -b_2 & a_2 \\ -a_2 & b_2 & a_1 & -b_1 \\ -b_2 & -a_2 & b_1 & a_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

кўринишидаги матрицалардан иборат бўлган H^* тўплам берилган бўлсин, бу ерда $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$. H^* тўплам матрицаларни кўпайтириш амалига нисбатан $GL(4,R)$ группага қисм группани ифодалайди, [1]. Шунингдек, $\forall h \in H^*$ матрица учун қуйидаги шартлар ўринли бўлади:

$$h^t h = hh^t = \boldsymbol{E}, h^t \boldsymbol{I} h = h\boldsymbol{I}h^t = \boldsymbol{I}, h^t \boldsymbol{J} h = h\boldsymbol{J}h^t = \boldsymbol{J}, h^t \boldsymbol{K} h = h\boldsymbol{K}h^t = \boldsymbol{K}, \boldsymbol{det h = 1} \tag{2}$$

бу ерда, $h \in H^*$, h^t эса h матрицанинг транспонирлангани, $\boldsymbol{E}$-тўртинчи тартибли бирлик матрица, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ матрицалар эса мос ҳолда қуйидаги

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

кўринишларга эга бўлиб, улар учун

$$\boldsymbol{IJ = K = -JI,\ JK = I = -KJ,\ KI = J = -KI,\ I^2 = J^2 = K^2 = -E} \tag{3}$$

шартлар бажарилади.

Одатда, бундай группа *4-тартибли нормаланган ҳақиқий кватернион матрицалар группаси* ёки *кватернион сонларнинг ҳақиқий тасвирлари группаси* дейилади.

Маълумки, $h^t h = hh^t = \boldsymbol{E}$, $h^t \boldsymbol{I} h = h\boldsymbol{I}h^t = \boldsymbol{I}$ шартларни қаноатлантирувчи барча $h \in GL(4,R)$ матрицалар тўплами *ортогонал-симплектик* группани ҳосил қилади ва $O(4,R) \cap Sp(4,R)$ кўринишида белгиланади, [2]. Ушбу таърифга аналог тарзда H^* группани қуйидагича таърифлаймиз:

$$H^* = O(4,R) \cap Sp(4,R) \cap G_1 \cap G_2,$$

бу ерда

$$G_1 = \{g_1 \in GL(4,R): g_1 \boldsymbol{J} g_1{}^t = g_1{}^t \boldsymbol{J} g_1 = \boldsymbol{J}\};\ G_2 = \{g_2 \in GL(4,R): g_2 \boldsymbol{K} g_2{}^t = g_2{}^t \boldsymbol{K} g_2 = \boldsymbol{K}\}$$

кўринишидаги тўпламлар бўлиб, ҳар бири алоҳида $GL(4,R)$ группанинг қисм группасини ифодалайди. Шунингдек, G_1 ва G_2 группалар мос ҳолда, $\varphi(g_1) = \boldsymbol{\Omega_1} g_1 \boldsymbol{\Omega_1}$ ва

$f(g_2) = \boldsymbol{\Omega_2} g_2 \boldsymbol{\Omega_2}$ акслантиришларга нисбатан $Sp(4,R)$ группага изоморф группаларни ифодалайди, бу ерда $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2, \varphi(g_1) \in Sp(4,R)$, $f(g_2) \in Sp(4,R)$, $\boldsymbol{\Omega_1 I \Omega_1 = J}$, $\boldsymbol{\Omega_1^2 = E}$, $\boldsymbol{\Omega_2 I \Omega_2 = K}$, $\boldsymbol{\Omega_2^2 = E}$,

$$\boldsymbol{\Omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Йўлларнинг H^* группа таъсирига нисбатан эквивалентлиги

$V = R^4 -$ R майдон устида аниқланган 4 ўлчовли чизиқли фазо бўлсин. V фазонинг элементларини $\vec{x} = \{x_j\}_{j=1}^4$ кўринишидаги, 4-ўлчовли устун-векторлар кўринишида оламиз, бу ерда $x_j \in R, j = \overline{1,4}$. V фазонинг барча тескариланувчи чизиқли алмаштиришлари группаси $GL(4,R)$ нинг V фазога таъсири сифатида g матрицани $\vec{x}$ устун векторга чапдан табиий кўпайтмасини қараймиз, яъни $(g, \vec{x}\ ) \to g\vec{x}$.

Қуйида I орқали R майдоннинг (a,b) интервалини белгилаймиз,(бу ҳолда, $a = -\infty$ ёки $b = +\infty$ бўлиши мумкин).

V фазода аниқланган I *−йўл* деб шундай $\vec{x}: I \to V$, $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^4$, вектор функцияга айтиладики, унинг барча $x_j: I \to R$ координаталари чексиз марта дифференциалланувчи функцияларни ифодалайди.

$\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^4$ $I -$ йўлни *r-тартибли ҳосиласи* деб,

$\vec{x}^{(r)}(t) = \left\{x_j^{(r)}(t)\right\}_{j=1}^4$ вектор функцияга айтилади, бу ерда $x_j^{(r)}(t) -$ $x_j(t)$ функцияни *r-тартибли ҳосиласи*, $j = \overline{1,4}$, $r = 1,2,3, \dots$. Маълумки, $\vec{x}^{(r)}(t)$ вектор-функция ҳам барча r лар учун I −йўлни ифодалайди .

Агар ихтиёрий $t \in I$ учун $\vec{x}^{(1)}(t) \coloneqq x'(t) \neq 0$ шарт ўринли бўлса, $\vec{x}(t)$ I −йўл *регуляр* дейилади,[3].

Хар қандай $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^4$ I −йўл учун $M(\vec{x})(t)$ орқали 4×4-тартибли $(x_i^{(j-1)}(t))_{i,j=1}^4$ матрицани белгилаймиз, бу ерда $j-$ устун $x_i^{(j-1)}(t)$ кўринишидаги координаталарга эга, бу ҳол учун $x_i^{(0)}(t) = x_i(t), i, j = \overline{1,4}$. $M'(\vec{x})(t)$ орқали $(x_i^{(j)}(t))_{i,j=1}^4$ матрицани оламиз.

Агар барча $t \in I$ учун $detM(\vec{x})(t)$ детерминант нолдан фарқли бўлса, мос ҳолда $\vec{x}(t)$ I −йўл *кучли регуляр* дейилади, [3].

G группа $GL(4,R)$ группанинг қисмгруппаси бўлсин. Агар шундай $g \in G$ элемент мавжуд бўлиб, барча $t \in I$ учун $\vec{y}(t) = g\vec{x}(t)$ тенглик ўринли бўлса, икки $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўллар G *−эквивалент* дейилади. Равшанки ([3].1.6§), бу ҳолда $\vec{y}^{(j)}(t) = g\vec{x}^{(j)}(t)$, $j = 1,2, \dots,$ ва $M(\vec{y})(t) = gM(\vec{x})(t)$ тенгликлар ҳам ўринли бўлади. Демак охирги тенгликларни ўринли бўлишидан $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўлларнинг G −эквивалентлиги келиб чиқади. [4].

$G = H^*$ бўлсин. Қуйида $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўлларнинг G −эквивалент бўлишини зарурий ва етарли шартларини матрицавий функциялар ёрдамида келтириб ўтамиз.

1-теорема. $\vec{x}(t)$ *ва* $\vec{y}(t)$ $I-$ *йўллар* G *−эквивалент бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли:*

1. $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1} M'(\vec{x})(t) = \left(M(\vec{y})(t)\right)^{-1} M'(\vec{y})(t)$;
2. $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{t} M(\vec{x})(t) = \left(M(\vec{y})(t)\right)^{t} M(\vec{y})(t)$;

3. $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{t}\boldsymbol{I}M(\vec{x})(t)=\left(M(\vec{y})(t)\right)^{t}\boldsymbol{I}M(\vec{y})(t);$
4. $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{\tau}\boldsymbol{J}M(\vec{x})(t)=\left(M(\vec{y})(t)\right)^{\tau}\boldsymbol{J}M(\vec{y})(t);$
5. $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{\tau}\boldsymbol{K}M(\vec{x})(t)=\left(M(\vec{y})(t)\right)^{\tau}\boldsymbol{K}M(\vec{y})(t);$
6. $detM(\vec{x})(t)=detM(\vec{y})(t);$

бу ерда $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{t}$ ва $\left(M(\vec{x})(t)\right)^{\tau}$ матрицалар $M(\vec{x})(t)$ матрицанинг мос ҳолда транспонирлангани ва $\tau-$ амални таъсир қилган ҳолини ифодалайди.

Исбот. Фараз қиламиз, $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўллар $G-$эквивалент бўлсин.

У ҳолда, юқоридаги фикрларга асосан $M(\vec{y})(t)=gM(\vec{x})(t)$ тенглик ўринли бўлади. Ушбу тенглик ёрдамида 1.-6.тенгликларни ўринли бўлишини текшириш қийин эмас. Масалан, 1-тенгликни текширайлик,

$$\left(M(\vec{y})(t)\right)^{-1}M'(\vec{y})(t)=\left(gM(\vec{x})(t)\right)^{-1}\left(gM(\vec{x})(t)\right)'=$$
$$=\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}g^{-1}g\left(M(\vec{x})(t)\right)'=\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}M'(\vec{x})(t)$$

Қолган тенгликларни ҳам ўринли бўлишини юқоридаги каби кўрсатиш мумкин.

Энди тескари тарафдан фараз қиламиз, яъни 1.-6. тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда, матрицавий амаллардан ва ихтиёрий хосмас A матрица учун $(A^{-1})'=-A^{-1}A'A^{-1}$ тенгликни тўғрилигидан фойдаланиб

1) $\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)'=0;$
2) $\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)^{t}\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)=\boldsymbol{E};$
3) $\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)^{t}\boldsymbol{I}\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)=\boldsymbol{I};$
4) $\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)^{\tau}\boldsymbol{J}\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)=\boldsymbol{J};$
5) $\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)^{\tau}\boldsymbol{K}\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)=\boldsymbol{K};$
6) $\boldsymbol{det}\left(M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}\right)=1$

тенгликларга эга бўламиз. 1) тенгликдан $M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}=g\in GL(4,R)$ бўлиши келиб чиқади. У ҳолда, 2)-6) шартлардан

$$g^{t}g=\boldsymbol{E},\quad g^{t}\boldsymbol{I}g=\boldsymbol{I},\quad g^{\tau}\boldsymbol{J}g=\boldsymbol{J},\quad g^{\tau}\boldsymbol{K}g=\boldsymbol{K},\quad detg=1$$

муносабатлар келиб чиқади. Бу тенгликлар эса, фақат ва фақат $g\in G=H^{*}$ бўлгандагина бажарилади. Демак, $M(\vec{y})(t)\left(M(\vec{x})(t)\right)^{-1}=g\in G$. Бундан, $M(\vec{y})(t)=gM(\vec{x})(t)$, $g\in G$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан, $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўлларнинг $G-$эквивалент бўлиши келиб чиқади. **Теорема исботланди.**

H^{*} группа таъсирига нисбатан инвариант дифференциал рационал функциялар майдони

Маълумки, $\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ $I-$ йўлларнинг $G-$эквивалент бўлиши учун 1-теоремада келтирилган зарурий ва етарли шартлари мос ҳолда $x_i(t), x_i^{(j)}(t), i,j=\overline{1,4}$ ўзгарувчили рационал функциялар учун маълум тенгликларни ифодалайди. Таъбийки, бундай боғланишни ўрганишда саноқли сондаги

$$x_1(t),\dots,x_4(t),x_1^{(1)}(t),\dots,x_4^{(1)}(t),\dots,x_1^{(r)}(t),\dots,x_4^{(r)}(t),\dots$$

ўзгарувчили барча рационал функцияларнинг $R\langle\vec{x}\rangle$ майдони $d\left(x_i^{(r)}(t)\right)=x_i^{(r+1)}(t)$ дифференциаллаш амали билан қаралади. У ҳолда, $R\langle\vec{x}\rangle$ майдон элементлари $d-$*рационал функция*, $R\langle\vec{x}\rangle$ майдоннинг ўзи эса $d-$*майдон* дейилади, (қ.нг [3],1).

Агар $\varphi \in R\langle \vec{x} \rangle$ ва барча $g \in G$ учун $\varphi(g\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ тенглик ўринли бўлса, $\varphi -$ $d -$рационал функция $(g, \vec{x}) \to g\vec{x}$ амалга нисбатан $G -$*инвариант* дейилади, бу ерда $G \subset GL(4, R)$.
1-теоремада келтирилган 1)-6) тенгликларни чап қисмини мос ҳолда

$$\left(a_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{4}, \left(b_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{4}, \left(c_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{4}, \left(d_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{4}, \left(e_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^{4}$$

матрицалар ва $f(t)$ функция орқали белгилаймиз. У ҳолда, хар бир матрицанинг элементлари ва $f(t)$ функцияни ўзи қуйидаги кўринишдаги $H^* -$инвариант, $d -$рационал функцияларни ифодалайди:

$$a_{i,j}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{4}(-1)^{i+k} M_{ki}(t) x_k^{(j)}(t)}{\left[\vec{x}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]};$$

$$b_{i,j}(t) = \left(\vec{x}^{(i-1)}, \vec{x}^{(j-1)}\right) = x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} + x_2^{(i-1)} x_2^{(j-1)} + x_3^{(i-1)} x_3^{(j-1)} + x_4^{(i-1)} x_4^{(j-1)};$$

$$c_{i,j}(t) = \left[\vec{x}^{(i-1)}, \vec{x}^{(j-1)}\right]_{\boldsymbol{I}} = x_1^{(i-1)} x_2^{(j-1)} - x_2^{(i-1)} x_1^{(j-1)} + x_3^{(i-1)} x_4^{(j-1)} - x_4^{(i-1)} x_3^{(j-1)}$$

$$d_{i,j}(t) = \left[\vec{x}^{(i-1)}, \vec{x}^{(j-1)}\right]_{\boldsymbol{J}} = x_1^{(i-1)} x_3^{(j-1)} - x_3^{(i-1)} x_1^{(j-1)} + x_4^{(i-1)} x_2^{(j-1)} - x_2^{(i-1)} x_4^{(j-1)},$$

$$e_{i,j}(t) = \left[\vec{x}^{(i-1)}, \vec{x}^{(j-1)}\right]_{\boldsymbol{K}} = x_1^{(i-1)} x_4^{(j-1)} - x_4^{(i-1)} x_1^{(j-1)} + x_2^{(i-1)} x_3^{(j-1)} - x_3^{(i-1)} x_2^{(j-1)}$$

$$f(t) = \left[\vec{x}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \\ x_4 & x_4^{(1)} & x_4^{(2)} & x_4^{(3)} \end{vmatrix}.$$

бу ерда, $(-1)^{i+k} M_{ki}(t) - M(\vec{x})(t)$ матрицанинг $\vec{x}_{ki}(t)$ элементининг алгебраик тўлдирувчисини ифодалайди.

1-изох. *Юқорида келтирилган $d -$рационал функцияларни $H^* -$инвариант бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Масалан,*

$$c_{i,j}(ht) = \left[h\vec{x}^{(i-1)}, h\vec{x}^{(j-1)}\right]_{\boldsymbol{I}} = \left(h\vec{x}^{(i-1)}\right)^T \boldsymbol{I}\left(h\vec{x}^{(i-1)}\right) =$$

$$= \left(\vec{x}^{(i-1)}\right)^T h^T \boldsymbol{I} h\left(\vec{x}^{(i-1)}\right) = \left[\vec{x}^{(i-1)}, \vec{x}^{(j-1)}\right]_{\boldsymbol{I}} = c_{i,j}(t).$$

бу ерда $h \in H^*$.

Қуйидаги леммада юқорида кўрсатилган $(\,,), [\,,]_{\boldsymbol{I}}, [\,,]_{\boldsymbol{J}}, [\,,]_{\boldsymbol{K}}$ формалар орасидаги муносабатлар кўрсатилган.

Лемма. *Хар қандай $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in R^4$ векторлар учун қуйидаги муносабатлар ҳар доим ўринли бўлади:*

R_1: $(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})^2 + [\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{I}}^2 + [\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{J}}^2 + [\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{K}}^2$;

R_2: $[\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{J}}[\vec{z}, \vec{w}]_{\boldsymbol{J}} + [\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{K}}[\vec{z}, \vec{w}]_{\boldsymbol{K}} = [(\vec{x}, \vec{z})(\vec{y}, \vec{w}) - (\vec{x}, \vec{w})(\vec{y}, \vec{z})] -$
$-[[\vec{x}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}}[\vec{y}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}} - [\vec{x}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}}[\vec{y}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}}]$;

R_3: $[\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{J}}[\vec{z}, \vec{w}]_{\boldsymbol{K}} - [\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{K}}[\vec{z}, \vec{w}]_{\boldsymbol{J}} = [(\vec{x}, \vec{z})[\vec{y}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}} + (\vec{y}, \vec{w})[\vec{x}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}}] -$
$-[(\vec{x}, \vec{w})[\vec{y}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}} + (\vec{y}, \vec{z})[\vec{x}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}}]$;

R_4: $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}] = \pm([\vec{x}, \vec{y}]_{\boldsymbol{I}}[\vec{z}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}} + [\vec{x}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}}[\vec{y}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}} - [\vec{x}, \vec{z}]_{\boldsymbol{I}}[\vec{y}, \vec{w}]_{\boldsymbol{I}})$.

Исбот. Леммада кўрсатилган муносабатларни тўғрилигини кўрсатиш учун ҳар бир форманинг кўринишидан фойдаланиб, баъзи ҳисоблашларни бажаришимиз етарли:
R_1: $(\vec{x},\vec{y})^2+[\vec{x},\vec{y}]_I^2+[\vec{x},\vec{y}]_J^2+[\vec{x},\vec{y}]_K^2=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+$

$$+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2+(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2+$$
$$+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)+(x_3^2+x_4^2)(y_3^2+y_4^2)+$$
$$+(x_1^2+x_2^2)(y_3^2+y_4^2)+(x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2)=(y_1^2+y_2^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+$$
$$+(y_3^2+y_4^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$
$$=(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y});$$

R_2: $[(\vec{x},\vec{z})(\vec{y},\vec{w})-(\vec{x},\vec{w})(\vec{y},\vec{z})]-[[\vec{x},\vec{z}]_I[\vec{y},\vec{w}]_I-[\vec{x},\vec{w}]_I[\vec{y},\vec{z}]_I]=$

$$[(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3+x_4z_4)(y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3+y_4w_4)-$$
$$-(x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3+x_4w_4)(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3+y_4z_4)]-;$$
$$-[(x_1z_2-x_2z_1+x_3z_4-x_4z_3)(y_1w_2-y_2w_1+y_3w_4-y_4w_3)-$$
$$-(x_1w_2-x_2w_1+x_3w_4-x_4w_3)(y_1z_2-y_2z_1+y_3z_4-y_4z_3)]=$$
$$=(x_1y_3-x_3y_1)(z_1w_3-z_3w_1+z_4w_2-z_2w_4)+(x_1y_4-x_4y_1)\times$$
$$\times(z_1w_4-z_4w_1+z_2w_3-z_3w_2)+(x_2y_3-x_3y_2)(z_1w_4-z_4w_1+z_2w_3-z_3w_2)+$$
$$-(x_2y_4-x_4y_2)(z_1w_3-z_3w_1+z_4w_2-z_2w_4)=(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)\times$$
$$\times(z_1w_3-z_3w_1+z_4w_2-z_2w_4)+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)\times$$
$$\times(z_1w_4-z_4w_1+z_2w_3-z_3w_2)=[\vec{x},\vec{y}]_J[\vec{z},\vec{w}]_J+[\vec{x},\vec{y}]_K[\vec{z},\vec{w}]_K;$$

R_3: $[(\vec{x},\vec{z})[\vec{y},\vec{w}]_I+(\vec{y},\vec{w})[\vec{x},\vec{z}]_I]-[(\vec{x},\vec{w})[\vec{y},\vec{z}]_I+(\vec{y},\vec{z})[\vec{x},\vec{w}]_I]=$

$$=[(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3+x_4z_4)(y_1w_2-y_2w_1+y_3w_4-y_4w_3)+$$
$$+(y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3+y_4w_4)(x_1z_2-x_2z_1+x_3z_4-x_4z_3)]-$$
$$-[(x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3+x_4w_4)(y_1z_2-y_2z_1+y_3z_4-y_4z_3)+$$
$$+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3+y_4z_4)(x_1w_2-x_2w_1+x_3w_4-x_4w_3)]=$$
$$=(z_1w_4-z_4w_1)(x_1y_3-y_1x_3+y_2x_4-y_4x_2)+(z_1w_3-z_3w_1)\times$$
$$\times(x_4y_1-x_1y_4+x_3y_2-x_2y_3)+(z_2w_3-z_3w_2)(y_2x_4-x_2y_4+y_3x_1-x_3y_1)+$$
$$+(z_2w_4-z_4w_2)(x_2y_3-y_2x_3-x_4y_1+y_4x_1)=(x_1y_3-y_1x_3+y_2x_4-y_4x_2)\times$$
$$\times(z_1w_4-z_4w_1+z_2w_3-z_3w_2)+(x_4y_1-x_1y_4+x_3y_2-x_2y_3)(z_1w_3-z_3w_1+$$
$$+z_4w_2-z_2w_4)=[\vec{x},\vec{y}]_J[\vec{z},\vec{w}]_K+[\vec{y},\vec{x}]_K[\vec{z},\vec{w}]_J=$$
$$=[\vec{x},\vec{y}]_J[\vec{z},\vec{w}]_K-[\vec{x},\vec{y}]_K[\vec{z},\vec{w}]_J;$$

$$R_4:\ [\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{w}]^2=\begin{vmatrix}0 & [\vec{x},\vec{y}]_I & [\vec{x},\vec{z}]_I & [\vec{x},\vec{w}]_I\\ -[\vec{x},\vec{y}]_I & 0 & [\vec{y},\vec{z}]_I & [\vec{y},\vec{w}]_I\\ -[\vec{x},\vec{z}]_I & -[\vec{y},\vec{z}]_I & 0 & [\vec{z},\vec{w}]_I\\ -[\vec{x},\vec{w}]_I & -[\vec{y},\vec{w}]_I & -[\vec{z},\vec{w}]_I & 0\end{vmatrix}=$$
$$=([\vec{x},\vec{y}]_I[\vec{z},\vec{w}]_I+[\vec{x},\vec{w}]_I[\vec{y},\vec{z}]_I-[\vec{x},\vec{z}]_I[\vec{y},\vec{w}]_I)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ [\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{w}]=\pm([\vec{x},\vec{y}]_I[\vec{z},\vec{w}]_I+[\vec{x},\vec{w}]_I[\vec{y},\vec{z}]_I-[\vec{x},\vec{z}]_I[\vec{y},\vec{w}]_I)$$

Лемма исботланди.
Юқорида берилган лемма ва таърифлардан фойдаланиб $R\langle\vec{x}\rangle^{H^*}$ $d-$майдоннинг ташкил эътувчилари системаси кўрсатамиз:

2-теорема. *Қуйидаги H^*-инвариант $d-$инвариант рационал функциялар системаси $R\langle\vec{x}\rangle^{H^*}$ $d-$майдоннинг ташкил эътувчилари системасини ифодалайди:*

$$(\vec{x},\vec{x}),\ [\vec{x},\vec{x}^{(1)}]_{I'},\ [\vec{x},\vec{x}^{(1)}]_{J'},\ [\vec{x},\vec{x}^{(1)}]_K \qquad (4)$$

Исбот. Маълумки, $(\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i)})$ ва $[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}]_I$ $d-$кўпҳадлар системаси мос ҳолда, $R\langle\vec{x}\rangle^{O(4,R)}$ ва $R\langle\vec{x}\rangle^{Sp(4,R)}$ $d-$рационал функциялар майдонининг $d-$рационал базисини ифодалайди, бу ерда $0\le i\le 3$ (қ-нг [3], [4]). Шунингдек, $Sp(4,R)\cong G_1$ ва $Sp(4,R)\cong G_2$ муносабатларни кучидан $[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}]_J$ ва $[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}]_K$ $(0\le i\le 3)$ $d-$кўпҳадлар системаси

мос ҳолда $R\langle\vec{x}\rangle^{G_1}$ ва $R\langle\vec{x}\rangle^{G_2}$ $d-$майдонларнинг $d-$рационал базисларини ифодалайди. Демак, ҳар қандай $f\langle\vec{x}\rangle\in R\langle\vec{x}\rangle^{G}$ $d-$рационал функция

$$\left(\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i)}\right),\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{I'}\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{J'}\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{K'}(0\le i\le 3) \qquad (5)$$

система элементларига $R\langle\vec{x}\rangle^{G}$ $d-$майдон операцияларини чекли марта қўллаш ёрдамида ҳосил қилинади. Бундан келиб чиқадики, $R\langle\vec{x}\rangle^{G}$ $d-$майдоннинг ташкил этувчилари системаси (5) система элементларининг алгебраик боғланмаганларидан иборат бўлади. Уларни аниқлаш учун қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз. Ҳисоблашлар ихчамроқ кўринишда бўлиши учун қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

$\left(\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i)}\right)=b_{ij},\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{I}=c_{ij},\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{J}=d_{ij},\left[\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(i+1)}\right]_{K}=e_{ij}$ (6)

Юқоридаги белгилашларга дифференциаллаш амалини ва 1-4-хоссаларни татбиқ қилиш орқали қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

1) $b'_{ij}=b_{i+1j}+b_{ij+1}, c'_{ij}=c_{i+1j}+c_{ij+1}, d'_{ij}=d_{i+1j}+d_{ij+1}, e'_{ij}=e_{i+1j}+e_{ij+1};$
2) $b_{ij}=b_{ji}, c_{ij}=-c_{ji}, d_{ij}=-d_{ji}, e_{ij}=-e_{ji}, c_{ii}=d_{ii}=e_{ii}=0;$
3) $b_{ii}b_{jj}=b_{ij}^2+c_{ij}^2+d_{ij}^2+e_{ij}^2;$
4) $d_{ij}d_{mm}+e_{ij}e_{mm}=\left(b_{im}b_{jn}-b_{in}b_{jm}\right)-\left(c_{im}c_{jn}-c_{in}c_{jm}\right);$
5) $d_{ij}e_{mm}-d_{mn}e_{ij}=\left(b_{im}c_{jn}+b_{jn}c_{im}\right)-\left(b_{in}c_{jm}+b_{jm}c_{in}\right).$
6) $d_{ij}e_{mn}-d_{mn}e_{ij}=\left(b_{im}c_{jn}+b_{jn}c_{im}\right)-\left(b_{in}c_{jm}+b_{jm}c_{in}\right).$

Дастлаб, 1)-3) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$b_{11}=\frac{b_{01}^2+c_{01}^2+d_{01}^2+e_{01}^2}{b_{00}}, b_{01}=\frac{1}{2}b'_{00}, b_{22}=\frac{b_{12}^2+c_{12}^2+d_{12}^2+e_{12}^2}{b_{11}}, b_{12}=\frac{1}{2}b'_{11};$$
$$b_{33}=\frac{b_{23}^2+c_{23}^2+d_{23}^2+e_{23}^2}{b_{22}}, b_{23}=\frac{1}{2}b'_{22}.$$

Ушбу тенгликлардан $\{b_{00}, c_{ii+1}, d_{ii+1}, e_{ii+1}\}$ системага эга бўламиз, бу ерда $0\le i\le 3$.

Энди эса 1), 2), 5) тенгликлардан фойдаланамиз:

$$c_{12}=\frac{d_{01}e_{02}-d_{02}e_{01}-b_{02}c_{01}+b_{01}c_{02}}{b_{00}}, e_{02}=e'_{01}, b_{02}=\frac{1}{2}b''_{00}-b_{11}, c_{02}=c'_{01};$$
$$c_{23}=\frac{d_{12}e_{13}-d_{13}e_{12}-b_{13}c_{12}+b_{12}c_{13}}{b_{11}}, e_{13}=e'_{12}, b_{13}=\frac{1}{2}b''_{11}-b_{22}, c_{13}=c'_{12};$$
$$c_{34}=\frac{d_{23}e_{24}-d_{24}e_{23}-b_{24}c_{23}+b_{23}c_{24}}{b_{22}}, e_{24}=e'_{23}, b_{24}=\frac{1}{2}b''_{22}-b_{33}, c_{24}=c'_{23}.$$

Бу тенгликлардан (5) системани $\{b_{00}, c_{01}, d_{ii+1}, e_{ii+1}\}$ системагача минималлаштиришга эришамиз. Қуйида 4) ва 5) тенгликларни система сифатида ечиб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$d_{12}=\frac{d_{01}\left(b_{01}b_{12}-b_{02}b_{11}-c_{01}c_{12}\right)-e_{01}\left(b_{01}c_{12}+b_{12}c_{01}-b_{11}c_{02}\right)}{d_{01}^2+e_{01}^2};$$
$$d_{23}=\frac{d_{12}\left(b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}-c_{12}c_{23}\right)-e_{12}\left(b_{12}c_{23}+b_{23}c_{12}-b_{22}c_{13}\right)}{d_{12}^2+e_{12}^2};$$
$$d_{34}=\frac{d_{23}\left(b_{23}b_{34}-b_{24}b_{33}-c_{23}c_{34}\right)-e_{23}\left(b_{23}c_{34}+b_{34}c_{23}-b_{33}c_{24}\right)}{d_{23}^2+e_{23}^2};$$
$$e_{12}=\frac{e_{01}\left(b_{01}b_{12}-b_{02}b_{11}-c_{01}c_{12}\right)+d_{01}\left(b_{01}c_{12}+b_{12}c_{01}-b_{11}c_{02}\right)}{d_{01}^2+e_{01}^2};$$

$$e_{23}=\frac{e_{12}\left(b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}-c_{12}c_{23}\right)+d_{12}\left(b_{12}c_{23}+b_{23}c_{12}-b_{22}c_{13}\right)}{d_{12}^2+e_{12}^2};$$

$$e_{34}=\frac{e_{23}\left(b_{23}b_{34}-b_{24}b_{33}-c_{23}c_{34}\right)+d_{23}\left(b_{23}c_{34}+b_{34}c_{23}-b_{33}c_{24}\right)}{d_{23}^2+e_{23}^2}.$$

Ушбу тенгликлардан (5) системани $\{b_{00},\ c_{01},\ d_{01},\ e_{01}\}$ системагача минималлаштиришга эришамиз. Демак, ихтиёрий $f\langle\vec{x}\rangle\in R\langle\vec{x}\rangle^G$ $d-$рационал функция $\{b_{00},\ c_{01},\ d_{01},\ e_{01}\}$ система элементларига $R\langle\vec{x}\rangle^G$ $d-$майдон операцияларини чекли марта қўллаш ёрдамида ҳосил қилинади. **Теорема исботланди**.

2-изоҳ. *R_4 муносабатдан $a_{i4}(t)$ $G-$инвариант $d-$рационал функция b_{mn} $G-$инвариант $d-$кўпҳадлар орқали ифодаланиши келиб чиқади, бу ерда $i=\overline{1,4},\ m,n\in Z_0^+$.*

Хулоса ўрнида, 1-, 2- теоремалар ва юқорида келтирилган изоҳдан келиб чиқувчи қуйидаги натижани келтириб ўтамиз:

Натижа. *$\vec{x}(t)$ ва $\vec{y}(t)$ I-йўллар $G-$эквивалент бўлиши учун қуйидаги шартларни бажарилиши зарур ва етарли:*

$$(\vec{x}(t),\vec{x}(t))=(\vec{y}(t),\vec{y}(t)),\ [\vec{x}(t),\vec{x}'(t)]_{\boldsymbol{I}}=[\vec{y}(t),\vec{y}'(t)]_{\boldsymbol{I}},$$
$$[\vec{x}(t),\vec{x}'(t)]_{\boldsymbol{J}}=[\vec{y}(t),\vec{y}'(t)]_{\boldsymbol{J}},\ [\vec{x}(t),\vec{x}'(t)]_{\boldsymbol{K}}=[\vec{y}(t),\vec{y}'(t)]_{\boldsymbol{K}}.$$

Адабиётлар рўйхати

1. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. – Киев: Сталь, 2016.

2. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – Москва: Наука, 1986.

3. Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. – Ташкент: Фан, 1998.

4. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.

5. Муминов К.К., Журабоев С.С. Эквивалентность путей относительно действия группа кватернионы \\ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА МАТЕМАТИКАНИНГ ТУРДОШ БЎЛИМЛАРИ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ мавзусидаги Халқаро илмий конференция, Фарғона, 2020 йил 12-13-март, 60-бет.

6. Мўминов Қ.Қ., Жўрабоев С.С. Гиперболик текисликнинг ҳаракатлари группаси таъсирига нисбатан йўлларнинг эквивалентлиги\\Нам.ДУ илмий ахборотномаси, 2020 й, 9-сон, 14-20 б.

МУНДАРИЖА

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
01.00.00 ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

КИМЁ ФАНЛАРИ
02.00.00 ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ
CHEMICAL SCIENCES